Capitolo 1

Identificazione dei modelli econometrici

"Gli indici azionari di Wall Street hanno previsto nove delle ultime cinque recessioni!"

Paul A. Samuelson in Newsweek, Science and Stocks, 19 Settembre 1966

I falsi allarmi sono un argomento imbarazzante per coloro che effettuano previsioni.

1.1 Il problema dell'identificazione dei modelli econometrici.

Un classico problema nella stima dei modelli econometrici è quello dell'identificazione. Con questo termine si fa riferimento ad un problema più generale che riguarda il confronto tra numero di equazioni e numero di incognite. Nel caso specifico che analizzeremo, il problema dell'identificazione si riferisce alla verifica se vi siano abbastanza equazioni per consentire un'unica determinazione delle variabili endogene in termini delle variabili esogene e degli errori. L'esempio classico che serve a spiegare il problema dell'identificazione è quello del modello della domanda e dell'offerta. Si supponga di avere informazioni quantitative per un dato anno su Q e P relative ad un bene o servizio, ma non relative ad altre variabili quali il reddito del consumatore, il prezzo prevalente ai periodi precedenti, ecc.. In questo caso il problema dell'identificazione consiste nel trovare una risposta alla domanda se, dati Q e P, stiamo stimando la curva di offerta o la curva di domanda. In altre parole, dal momento che Q e P che osserviamo sono determinati dall'incontro tra curva di domanda e curva di offerta, cosa ci garantisce che stiamo stimando proprio la curva di domanda e non un'altra funzione (ad esempio la curva di offerta)? Per chiarire meglio il problema e, successivamente, per trovare una soluzione, consideriamo il seguente modello: Funzione di domanda:

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t} \tag{1.1}$$

dove $\alpha_1 < 0$. Funzione di offerta:

$$Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \tag{1.2}$$

dove $\beta_1 > 0$. Condizione di equilibrio:

$$Q_t^d = Q_t^s \tag{1.3}$$

dove le lettere hanno i tradizionali significati, mentre u_{1t} e u_{2t} rappresentano degli errori distribuiti normalmente con media uguale a 0 e varianza definita. Dalla condizione di equilibrio otteniamo:

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t} = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \tag{1.4}$$

e risolvendo per il prezzo otteniamo la seguente espressione:

$$P_t = \Pi_0 + v_t \tag{1.5}$$

dove

$$\Pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.6}$$

e

$$v_t = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.7}$$

Sostituendo l'espressione di P_t nell'equazione di domanda o di offerta, otteniamo la seguente espressione per la quantità:

$$Q_t = \Pi_2 + w_t \tag{1.8}$$

dove

$$\Pi_2 = \frac{\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.9}$$

e

$$w_t = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.10}$$

Le due equazioni per il prezzo e la quantità sono equazioni cosiddette in forma ridotta, cioè equazioni dove le variabili endogene sono espresse in funzione solo delle variabili predeterminate (esogene o dipendenti ritardate). Nel nostro caso, non essendoci variabili predeterminate, le due variabili endogene (prezzo e quantità) nelle equazioni in forma ridotta sono "funzione" di

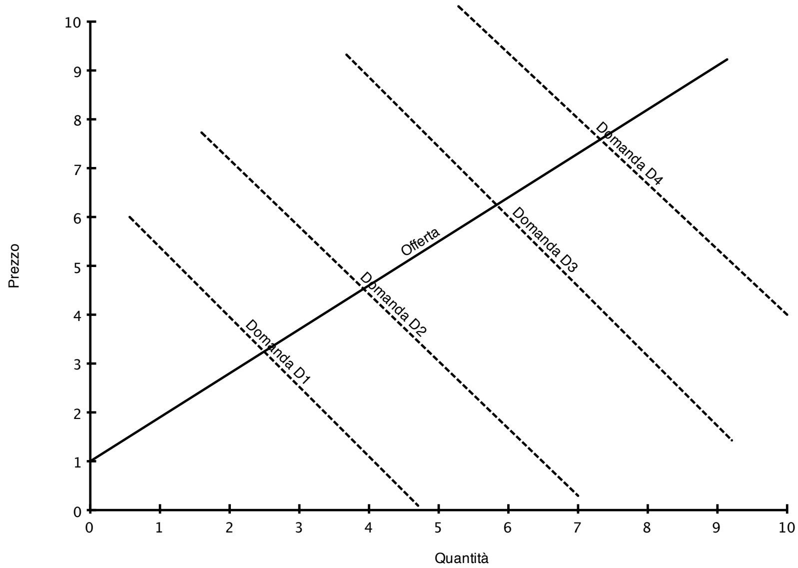

Figura 1.1: La domanda è più volatile dell'offerta

due costanti (Π_0 e Π_2). Queste ultime, a loro volta, sono una combinazione dei parametri strutturali del modello (α_0, α_1, β_0, β_1). Se noi stimassimo le due equazioni strutturali riusciremmo ad ottenere due valori per Π_0 e Π_2, ma non saremmo in grado di risalire ai parametri strutturali. Infatti, ci troviamo in una situazione caratterizzata dalla presenza di quattro incognite (i parametri strutturali) e di due equazioni. In altri termini, nulla garantisce l'analista che sta stimando la funzione di domanda invece di quella di offerta. Per risolvere questo dilemma avremmo bisogno di ulteriori informazioni. Ad esempio, supponiamo che nel tempo la curva di domanda si sposti in seguito a variazioni del reddito o delle preferenze dei consumatori, mentre la curva di offerta rimanga relativamente stabile. In questo caso una nuvola di punti nello spazio (P, Q) serve ad identificare la curva di offerta. Viceversa, nel caso sia la curva di offerta a mostrare maggiore variabilità rispetto a quella di domanda, sarà quest'ultima ad essere identificata (cfr. Figure 1.1 e 1.2). Se modifichiamo la funzione di domanda includendo una variabile che misura il reddito dei consumatori (I_t) avremo:

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t} \tag{1.11}$$

dove $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$. In questo caso le equazioni in forma ridotta sono rispettivamente:

$$P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + v_t \tag{1.12}$$

dove

$$\Pi_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.13}$$

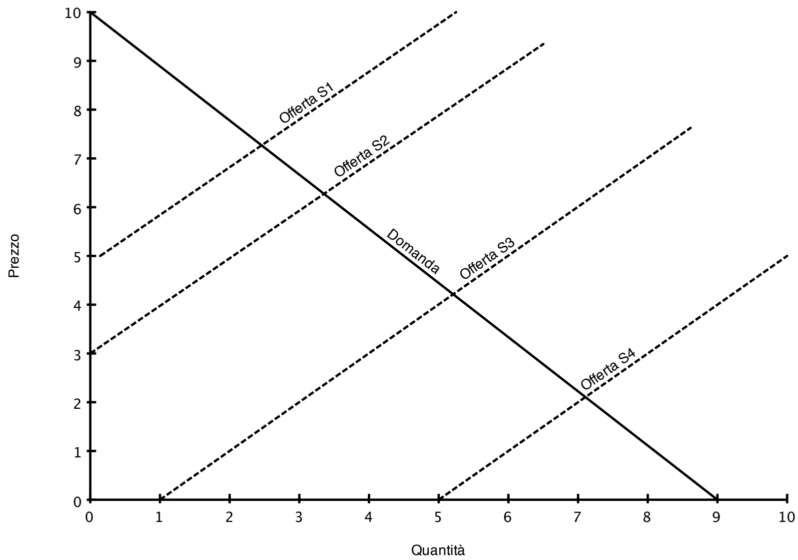

Figura 1.2: L'offerta è più volatile della domanda

e

$$Q_t = \Pi_2 + \Pi_3 I_t + w_t \tag{1.14}$$

dove

$$\Pi_3 = \frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.15}$$

Anche in questo caso il numero di incognite (i parametri strutturali, α_0, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2) è superiore al numero di equazioni (Π_0, Π_1, Π_2, Π_3). Di conseguenza, non esiste un'unica soluzione per tutti e cinque i parametri strutturali. Tuttavia, è invece possibile identificare i parametri strutturali della funzione di offerta. Infatti, si può dimostrare che:

$$\beta_0 = \Pi_2 - \beta_1 \Pi_0 \tag{1.16}$$

e

$$\beta_1 = \frac{\Pi_3}{\Pi_1} \tag{1.17}$$

Diversamente, non esiste un modo univoco di stimare i parametri della funzione di domanda che, di conseguenza, rimane sotto-identificata. Si noti anche che il parametro strutturale β_1 è una funzione non lineare dei coefficienti della funzione in forma ridotta. Questo fatto pone qualche problema nella stima dell'errore standard del coefficiente stimato β_1.[1] Va rilevato che la possibilità di identificare la funzione di offerta dipende dalla presenza di variabili aggiuntive nella funzione di domanda. L'aggiunta della variabile

[1] Su questo dibattito cfr. Gujarati (1995), nota 10, p.685.

"reddito" nella equazione di domanda fornisce, infatti, più informazioni sulla variabilità della funzione. Nel caso specifico, la variabile "reddito" rappresenta lo "strumento" mediante il quale è possibile stimare i parametri strutturali della funzione di offerta. Infatti, in questo caso si parla anche di metodo delle "variabili strumentali" (*instrumental variables* – IV).

La simultaneità tra vendite e spese pubblicitarie

Un altro caso di simultaneità è quello tra vendite e spese per pubblicità. Nel prendere le sue decisioni in merito all'ammontare ottimo di pubblicità, un'impresa che ha l'obiettivo di massimizzare il profitto tende a considerare la pubblicità come uno dei tanti fattori di produzione. Diversamente dagli altri input, tuttavia, la pubblicità non solo influenza i costi di produzione ma determina uno spostamento della curva di domanda dei prodotti dell'impresa. Dalla teoria microeconomica ci ricordiamo che ogni fattore di produzione deve essere utilizzato fino al punto nel quale il ricavo marginale è uguale al costo marginale. Tuttavia, nel caso della pubblicità la condizione di massimizzazione del profitto è soddisfatta quando il ricavo marginale netto è uguale al costo marginale.[2] Consideriamo la seguente definizione di profitto:

$$\pi = PQ(M,P) - C[Q(M,P)] - MT$$

dove $C[Q(M,P)] - MT$ sono i costi di produzione che dipendono dalla quantità prodotta che, a sua volta, è funzione del prezzo (P) e del numero di messaggi pubblicitari (M). Infine, T è il costo unitario di M che è indipendente dal numero di messaggi pubblicitari acquistati. Se l'impresa opera in mercati di concorrenza imperfetta, la condizione del primo ordine per la massimizzazione del profitto rispetto al numero di messaggi pubblicitari è:

$$(P - CM)\frac{\partial Q}{\partial M} = T$$

Il termine a sinistra del segno di uguaglianza è il prodotto del profitto per l'impatto della pubblicità sulle vendite, mentre il termine a destra è il costo marginale dei messaggi pubblicitari. Quando i profitti sono massimizzati, il ricavo marginale netto dei messaggi pubblicitari deve uguagliare il loro costo marginale. Definiamo l'elasticità della quantità domandata rispetto ai messaggi pubblicitari come:

$$m = \frac{\partial Q}{\partial M}\frac{M}{Q} \text{ da cui } \frac{\partial Q}{\partial M} = m\frac{Q}{M}$$

Se sostituiamo questa espressione nella condizione del primo ordine per la massimizzazione del profitto, e dividiamo entrambi i termini per P, otteniamo la seguente espressione:

$$\frac{P-CM}{P} = \frac{1}{m}\frac{(MT)}{PQ}$$

Dalla microeconomia ci ricordiamo che il termine a sinistra del segno di uguaglianza (il markup sui costi) è uguale a $-\frac{1}{\epsilon}$ dove ϵ è l'elasticità della domanda al prezzo. Di conseguenza, l'ultima espressione può essere scritta come:

$$\frac{(MT)}{PQ} = -\frac{m}{\epsilon}$$

in altri termini, il rapporto ottimale tra spese di pubblicità e vendite dipende solo dal rapporto tra l'elasticità delle vendite ai messaggi pubblicitari e l'elasticità della domanda al prezzo. Nel caso di prodotti maturi le due elasticità, e quindi anche il loro rapporto, sono relativamente costanti. Nel caso di nuovi prodotti si è soliti ipotizzare che m sia inizialmente elevata per poi diminuire gradualmente, e viceversa per ϵ. Ciò suggerisce che per i nuovi prodotti il rapporto iniziale spese di pubblicità-vendite sia più elevato di quello relativo a prodotti maturi. Infine, l'espressione per il rapporto ottimale pubblicità-vendite suggerisce che un aumento delle vendite è associato ad un aumento proporzionale delle spese per pubblicità. Questa conclusione ha importanti conseguenze per l'analisi empirica in quanto implica che le spese di pubblicità sono endogene. Ma le imprese sostengono spese pubblicitarie perché ritengono che le vendite dipendono positivamente da M. In altri termini, sia le vendite che le spese pubblicitarie sono determinate simultaneamente.

Cosa accade se il numero di equazioni è superiore al numero di incognite? La principale conseguenza è che non è possibile stimare in modo univoco tutti i parametri del modello. In altri termini, è possibile che il parametro stimato β_1 sia funzione di diverse combinazioni dei coefficienti stimati delle equazioni in forma ridotta e non abbiamo alcuna garanzia che queste diverse combinazioni diano lo stesso risultato. Questa situazione è caratterizzata da un eccesso di informazioni e, non a caso, si parla di modelli sovra-identificati (o con un numero eccessivo di vincoli). Uno dei criteri più utilizzato per determinare se un'equazione all'interno di un sistema di equazioni simultanee è identificata è quello dell'*order condition*. Definiamo con m il numero di variabili endogene in una data equazione, con K il numero di variabili predeterminate del modello, e con k il numero di variabili predeterminate in una singola equazione. Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché una equazione sia identificata è che $K - k \geq m - 1$. In particolare, se $K - k = m - 1$ l'equazione è identificata, mentre se $K - k > m - 1$ l'equazione è sovra-identificata. Ad esempio, nel caso del modello domanda-offerta dove la funzione di domanda include anche la variabile "reddito", la funzione di domanda non è identificata in quanto dati $K = 1$, $k = 1$ e $m = 2$ la condizione non è soddisfatta. Diversamente, la funzione di offerta è identificata in quanto dati $K = 1$, $k = 0$ e $m = 2$ si ha $1 - 0 = 2 - 1$.

1.2 Il problema della simultaneità.

Un modo diverso di analizzare il problema dell'identificazione è quello della simultaneità. In altre parole, il prezzo e la quantità domandata (o offerta) di un bene sono determinati simultaneamente: P è una funzione di Q, ma Q a sua volta è funzione di P. In questo caso l'utilizzo del metodo dei minimi quadrati ordinari (OLS) produce stime che sono non consistenti (cioè il coefficiente stimato è diverso dal vero parametro di interesse anche quando le dimensioni del campione sono molto grandi) e inefficienti (cioè la varianza dei coefficienti stimati non è minimizzata). Nel caso di simultaneità il regressore (ad esempio P) è correlato con il termine di errore dell'equazione che vogliamo stimare.

Per verificare che $E(P_t u_{2t}) \neq 0$ è possibile utilizzare un test di specificazione (noto anche come test di specificazione di Hausman).
Riconsideriamo il modello precedente (1.11) (1.2) (1.3) con l'aggiunta di un'ulteriore variabile esplicativa nella funzione di domanda, la ricchezza dell'individuo (R_t).

Funzione di domanda:

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + \alpha_3 R_t + u_{1t} \tag{1.18}$$

dove $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ e $\alpha_3 > 0$.

Funzione di offerta:

$$Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t} \tag{1.19}$$

dove $\beta_1 > 0$.

Condizione di equilibrio:

$$Q_t^d = Q_t^s \tag{1.20}$$

In particolare, nell'equazione (1.18) abbiamo ipotizzato che la quantità domandata dipenda positivamente sia dal reddito (I_t) che dalla ricchezza (R_t) dell'individuo. Assumiamo che sia I_t che R_t siano variabili esogene. Se non ci fosse alcun problema di simultaneità, allora $E(P_t u_{2t}) = 0$ nella funzione di offerta.

La prima cosa da fare è ottenere dalle due equazioni di domanda e offerta le equazioni in forma ridotta di P e Q:

$$P_t = \Pi_0 + \Pi_1 I_t + \Pi_2 I_t + \nu_t \tag{1.21}$$

$$Q_t = \Pi_3 + \Pi_4 I_t + \Pi_5 I_t + \omega_t \tag{1.22}$$

dove ν_t e ω_t sono termini di errore in forma ridotta (cioè funzione dei termini di errore e dei parametri strutturali). Se stimiamo l'equazione del prezzo in forma ridotta mediante gli OLS otteniamo:

$$P_t = \hat{\Pi}_0 + \hat{\Pi}_1 I_t + \hat{\Pi}_2 I_t \tag{1.23}$$

Di conseguenza

$$P_t = \hat{P}_t + \hat{\nu}_t \tag{1.24}$$

dove $\hat{P}_t$ sono i valori stimati di P_t e $\hat{\nu}_t$ i termini di errore stimati. Se sostituiamo quest'ultima espressione per il prezzo nella funzione di offerta (1.19) otteniamo:

$$Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 \hat{P}_t + \beta_1 \hat{\nu}_t + u_{2t} \tag{1.25}$$

Allora, sotto l'ipotesi nulla che non ci sia simultaneità, la correlazione tra $\hat{\nu}_t$ e u_{2t} dovrebbe essere asintoticamente uguale a zero. Di conseguenza, se stimiamo l'ultima specificazione dell'equazione di offerta e il coefficiente di $\hat{\nu}_t$ è statisticamente uguale da zero, possiamo concludere che non c'è un problema di simultaneità. Praticamente, per effettuare il test di Hausman si deve procedere come segue. Nella prima fase si deve regredire il prezzo su reddito e ricchezza e ottenere i termini di errore $\hat{\nu}_t$. Nella seconda fase si deve regredire la Q_t su $\hat{P}_t$ e $\hat{\nu}_t$. [3] L'eventuale significatività del coefficiente stimato di $\hat{\nu}_t$ è l'indicazione della presenza di simultaneità, e viceversa.

Tuttavia, l'eccesso di informazioni non necessariamente è una situazione negativa perché sono stati sviluppati metodi per stimare modelli sovra-identificati. Il metodo più noto e utilizzato è quello dei minimi quadrati a due stadi (Two-Stage Least Squares – 2SLS).

Si consideri il seguente modello:

Equazione del reddito:

$$Y_t = \beta_{10} + \beta_{11} M_t + \gamma_{11} I_t + \gamma_{12} G_t + u_{1t} \tag{1.26}$$

Equazione dell'offerta di moneta:

$$M_t = \beta_{20} + \beta_{21} Y_t + u_{2t} \tag{1.27}$$

dove Y è il reddito, M lo stock di moneta, I gli investimenti, e G la spesa pubblica. In particolare, I e G sono variabili esogene. In questo modello esiste ovviamente un problema di simultaneità dal momento che il reddito è determinato dallo stock di moneta, ma anche che lo stock di moneta dipende dal livello del reddito.

Se utilizziamo il criterio dell'*order condition* discusso precedentemente, mentre l'equazione del reddito è sotto-identificata (infatti, la condizione $K - k \geq m - 1$, a cui nel nostro caso corrisponde $2 - 2 \geq 2 - 1$, non è soddisfatta), l'equazione dell'offerta di moneta è sovra-identificata (infatti, la condizione $K - k > m - 1$, a cui corrisponde $2 - 0 > 2 - 1$, è soddisfatta).

[3] Per ottenere una stima efficiente in questa seconda fase Pindyck e Rubenfield suggeriscono di utilizzare P_t al posto di $\hat{P}_t$

Mentre c'è poco da fare nel caso dell'equazione del reddito se non quello di modificare la specificazione del modello, l'equazione della moneta non può essere stimata mediante gli OLS per la probabile correlazione tra Y_t e u_{2t}. Si supponga, tuttavia, di trovare una *proxy* per la variabile Y_t tale che sia correlata con il reddito, ma non correlata con u_{2t}. Questa *proxy*, nota come variabile strumentale, potrebbe essere utilizzata al posto di Y_t e l'equazione dell'offerta di moneta potrebbe essere stimata mediante il metodo degli OLS. Il problema è trovare questa variabile *proxy* per Y_t. Una possibile soluzione è offerta dal metodo 2SLS il quale, come indicato dal suo nome, implica l'applicazione degli OLS due volte. Nella prima applicazione è necessario regredire la variabile Y_t su tutte le variabili esogene o predeterminate dell'intero modello (I e G nel nostro esempio) e si ottengono i valori stimati $\hat{Y}_t$. Nella seconda applicazione si utilizzano i valori $\hat{Y}_t$ nell'equazione dell'offerta di moneta al posto di Y_t e il metodo di stima è di nuovo quello degli OLS. Lo scopo di questa procedura è quello di depurare la variabile stocastica Y_t dall'influenza dell'errore u_{2t}.

Si noti infatti che:

$$Y_t = \hat{Y}_t + \hat{u}_t \tag{1.28}$$

dove, per definizione degli OLS, $Cov(\hat{Y}_t, \hat{u}_t) = 0$. Sostituendo questa definizione di Y_t nell'equazione dell'offerta di moneta (1.27) si ha che:

$$M_t = \beta_{20} + \beta_{21}\hat{Y}_t + u_t^* \tag{1.29}$$

dove

$$u_t^* = u_{2t} + \beta_{21}\hat{u}_t \tag{1.30}$$

Si dimostra che, utilizzando campioni di grandi dimensioni, $Cov(\hat{Y}_t, \hat{u}_t) = 0$; di conseguenza, l'equazione dell'offerta di moneta modificata può essere stimata mediante il metodo degli OLS. La differenza tra il metodo delle variabili strumentali (IV) e quello dei minimi quadrati a due stadi (2SLS) va ricondotta alla indentificabilità delle funzioni che si intende stimare. Nel caso di funzioni esattamente identificate, i due metodi di stima ottengono gli stessi risultati, mentre nel caso di funzioni sovra-identificate è necessario ricorrere ai 2SLS.

1.3 Alla ricerca del vero modello.

Esistono in letteratura diversi approcci per determinare la bontà di un modello econometrico. Il modello di regressione lineare assume che il modello che stiamo studiando sia specificato correttamente. Con ciò intendiamo che il modello contiene tutte la variabili esplicative utili a spiegare il fenomeno a cui siamo interessati. In presenza di questa ipotesi, la preoccupazione maggiore del ricercatore è quella di stimare i parametri del modello scelto e successivamente effettuare la serie di test discussa più sopra (R^2, t, DW, F, ecc.) in base ai quali saremo in grado di decidere se accettare il modello così com'è o se è necessario il ricorso a metodi di stima diversi, se abbiamo fatto degli errori di specificazione (il modello include poche o troppe variabili). Ad esempio, se la prima stima del modello evidenziasse la presenza di correlazione seriale degli errori si potrebbe utilizzare qualche metodo di stima che tenga conto della presenza del fenomeno. Se, nonostante questa soluzione, l'autocorrelazione fosse ancora presente, si potrebbe ipotizzare che il modello non sia stato specificato correttamente. Di conseguenza, dovrebbero essere aggiunte al modello nuove variabili in un classico processo *bottom-up*: partendo da un modello base vengono aggiunte nuove variabili sulla base dei risultati dei test diagnostici fino ad ottenere la specificazione migliore. Questo approccio è noto come Average Economic Regression (AER). Ma quali sono i criteri che chi utilizza l'approccio AER seleziona per stabilire se un modello sia accettabile? In breve, riportiamo di seguito una lista di passi (non necessariamente nell'ordine di presentazione) che il ricercatore dovrebbe seguire per migliorare la scelta del modello finale:[4]

1. Prova di ipotesi. E' necessario verificare la significatività statistica dei coefficienti o condurre test sul valore di uno o più coefficienti. Ad esempio, potremmo essere interessati a verificare se l'elasticità della domanda di un particolare prodotto sia uguale o diversa da 1, oppure se i rendimenti di scala siano costanti (cioè se la somma dei coefficienti del lavoro e del capitale in una funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas sia uguale a 1).

2. Interpretazione dei risultati. Il modello che stiamo stimando può essere modificato sulla base di alcune ipotesi ricavate dalla teoria economica. Ad esempio, il fatto che la domanda di un bene non soffra del problema dell'illusione monetaria (se reddito e prezzi si muovono proporzionalmente la quantità domandata non cambia) implica l'imposizione di alcune restrizioni sui coefficienti del nostro modello empirico.

3. Semplificazione del modello. Partendo da quanto rilevato al punto precedente, in presenza di omogeneità della funzione di domanda (ad esempio i coefficienti stimati del reddito e dei prezzi sono in valore simili assoluto) il modello empirico potrebbe includere una sola variabile, il reddito reale, invece di due variabili separate, il reddito nominale e i prezzi.

4. Impiego di variabili *proxy*. Se si ritiene che la variabile inizialmente utilizzata non misuri in maniera precisa un particolare fenomeno andrebbe sostituita con altre variabili. Ad esempio, se si ritiene che la spesa (E) sia un indicatore più preciso del reddito (I) della ricchezza

[4] Cfr. [1], Capitolo 14.

di un individuo, allora E andrebbe utilizzata al posto di I nella stima di una funzione di domanda.

5. Selezione dei dati. Spesso è necessario suddividere il campione per cogliere differenze di comportamento tra individui appartenenti a gruppi diversi.

6. Modifica del modello inizialmente stimato in base ai risultati ottenuti. In questa fase può essere necessario aggiungere o togliere delle variabili dalla specificazione originale sulla base delle stime ottenute. Ad esempio, l'inclusione nella funzione di domanda dei prezzi di beni sostitutivi inizialmente esclusi.

Un approccio alternativo alla scelta del modello migliore è quello che si rifà alla tradizione della *London School of Economics*, (LSE), che segue un percorso opposto a quello AER, cioè è di tipo *top-down* nel senso che si parte da un modello contenente molte variabili per arrivare ad un modello semplificato con le sole variabili ritenute importanti. Il punto di partenza dell'approccio LSE è quello di assumere l'esistenza di una relazione di lungo periodo (o di equilibrio) tra le variabili del modello, ma anche quello di riconoscere l'esistenza di un processo dinamico attraverso il quale l'equilibrio viene raggiunto in un certo lasso di tempo. Per semplificare, assumiamo che esista una relazione di equilibrio tra il prezzo e la quantità domandata di un certo bene. In alti termini, in corrispondenza del livello di prezzo, P^*, la quantità effettivamente domandata (e offerta) è Q^*. Per comodità, riprendiamo l'equazione (1.1):

$$Q^* = \alpha_0 + \alpha_1 P^* \tag{1.31}$$

In corrispondenza di P^* la quantità domandata è Q^*. Se ipotizziamo che attualmente la quantità sia uguale a Q_t, con $Q_t < Q^*$, non è escluso che per raggiungere Q^* il sistema economico impieghi un certo numero di periodi. Un discorso analogo potrebbe essere fatto anche per quanto riguarda i prezzi. Di conseguenza, l'equazione (1.31) viene modificata nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Q_t = \alpha_0 &+ \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + ... + \alpha_m P_{t-m} \\ &+ \beta_1 Q_{t-1} + \beta_2 Q_{t-2} + ... + \beta_m Q_{t-m} + u_t \end{aligned} \tag{1.32}$$

L'equazione (1.32) è un tipico modello dinamico o autoregressivo sufficientemente generale.[5] In quanto tale la prima decisione che si pone al ricercatore è quella della determinazione del valore di m, cioè del numero di ritardi di P e di Q che devono essere inclusi nella (1.32). Secondo i ricercatori della LSE il passaggio dall'equazione (1.32) ad un'equazione semplificata deve soddisfare i seguenti criteri:

[5] I modelli autoregressivi e i problemi di stima che presentano verranno discussi in uno dei prossimi capitoli.

1. Le previsioni fatte in base al modello semplificato devono essere logicamente possibili.

2. Le stime ottenute devono essere consistenti con la teoria.

3. Le variabili esplicative non devono essere correlate con il termine di errore u_t.

4. I parametri stimati devono essere stabili.

5. La serie u_t deve presentare un andamento casuale (*random*).

6. Il modello stimato deve contenere (*encompass*) tutti i modelli alternativi. In altre parole, il modello A *encompass* il modello B, se i risultati ottenuti da B non rappresentano un miglioramento di quelli di A.

Naturalmente, la scelta della specificazione finale (il valore ottimale di m), che rispetti i criteri sopra enunciati, passa tramite la stima di diverse specificazioni alternative. Hendry, uno dei membri della LSE, definisce questo approccio il metodo delle tre T (test, test, test).[6]

1.4 Alcuni test diagnostici per la selezione del vero modello.

Con lo scopo di facilitare il processo di selezione tra diversi modelli, sono stati sviluppati alcuni test diagnostici molto utili. Questi test si possono dividere tra quelli che si riferiscono a modelli cosiddetti *nested*, letteralmente annidati e quelli *nonnested*. Per chiarire la differenza tra *nested* e *nonnested* consideriamo i due modelli già visti in precedenza:

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + \alpha_3 R_t + u_t \tag{1.33}$$

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_t \tag{1.34}$$

Ciò che differenzia l'equazione (1.33) dall'equazione (1.34) è la presenza nella prima della variabile aggiuntiva R, cioè della ricchezza. E' evidente che il modello (1.34) è un caso particolare del modello (1.33) quando il coefficiente della variabile R $\alpha_3 = 0$. Di conseguenza, il modello (1.34) è *nested* nel modello (1.33) e la verifica può essere fatta con un semplice test della *t di Student*.

La situazione è diversa nel caso dei due modelli seguenti:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{X}_t + u_t \tag{1.35}$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{Z}_t + u_t \tag{1.36}$$

[6] Cfr. [1], p.486.

dove $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ sono diversi insiemi di variabili.
Chiaramente i modelli (1.35) e (1.36) sono *nonnested* in quanto il primo (il secondo) non può essere ricavato come caso speciale del secondo (primo). Al fine di scegliere tra questi due modelli è possibile seguire diversi aprocci. Ne richiamiamo qui due.

Il primo approccio indica che la scelta del modello deve basarsi su qualche criterio di bontà di accostamento del modello ai dati (*goodness of fit*). A questo scopo disponiamo di diversi indicatori e test statistici quali, R^2, il test di Akaike, e il test di Schwarz. Tuttavia, un modello che presenta l'R^2 più elevato rispetto ad altri modelli non necessariamente è il *vero* modello.

Il secondo approccio, noto anche come *test J di Davidson-MacKinnon*, suggerisce di procedere come segue. Supponiamo di dover scegliere tra i due modelli *nonnested* (1.35) e (1.36). Seguiremo allora le seguenti fasi:

1. In primo luogo stimiamo il modello (1.36) e ci ricaviamo i valori stimati di Y, $\hat{Y}_t^D$;

2. Successivamente aggiungiamo $\hat{Y}_t^D$ come variabile aggiuntiva nel modello (1.35):
$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{X}_t + \alpha_2 \hat{Y}_t^D + u_t \tag{1.37}$$
;

3. Mediante l'impiego del test *t di Student* verifichiamo se $\alpha_2 = 0$;

4. Se l'ipotesi $\alpha_2 = 0$ non può essere rifiutata, possiamo accettare il modello (1.35) come il *vero* modello perché l'influenza delle variabili non incluse in (1.35), rappresentata dalla variabile $\hat{Y}_t^D$, è statisticamente irrilevante rispetto all'informazione contenuta nel modello (1.35). In altri termini, il modello (1.35) *encompass* il modello (1.36);

5. E' necessario a questo punto ripetere i passaggi da 1 a 4 scambiando le posizioni dei due modelli (1.35) e (1.36). In particolare, una volta ottenuta la serie $\hat{Y}_t^C$, cioè i valori stimati del modello (1.35), dobbiamo stimare il seguente modello:
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{Z}_t + \beta_2 \hat{Y}_t^C + u_t \tag{1.38}$$
Se non possiamo rifiutare l'ipotesi $\beta_2 = 0$, allora sceglieremo il modello (1.36) rispetto al modello (1.35). Nel caso invece l'ipotesi $\beta_2 = 0$ dovesse essere rifiutata, cioè $\beta_2 \neq 0$, allora sceglieremmo il modello (1.35).

Sebbene risulti intuitivamente attraente, il *J test* presenta alcuni problemi. Il primo è che le due fasi del test sono condotte indipendentemente e, quindi, potrebbe accadere che entrambi i modelli (1.35) e (1.36) siano contemporaneamente accettati o rifiutati. Nel caso i due modelli siano contemporaneamente rifiutati la conclusione è che nessuno dei due è in grado di spiegare il comportamento di Y. Nel caso opposto, la loro contemporanea accettazione implica che l'informazione quantitativa in nostro possesso è insufficiente per discriminare tra le due ipotesi. Il secondo problema è che il test della *t di Student* al punto 3 della lista precedente conduce al rifiuto del *vero* modello più frequentemente di quanto dovrebbe in piccoli campioni dal momento che la statistica t è distribuita normalmente sono asintoticamente, cioè in presenza di grandi campioni.

Bibliografia

[1] Damodar N. Gujarati. *Basic Econometrics.* McGRAW-HILL, third edition edition, 1995.